$\boxed{18/10/16}$

$$P^n = \begin{bmatrix} \frac{b + \alpha(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} & \frac{\alpha - \alpha(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} \\ \frac{b - b(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} & \frac{\alpha + b(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} \end{bmatrix}$$

$\Pi_0 = \frac{b}{\alpha+b}$, $\Pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+b}$.

β' τρόπος (3ο ερώτημα).

$$p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P \Rightarrow \lim_{n\to\infty} p^{(n)} = \lim_{n\to\infty} \left[p^{(n-1)} \cdot P \right]$$

$p^{(n)} = (p_0^{(n)} \ \ p_1^{(n)})$ $\qquad$ $p^{(n-1)} = (p_0^{(n-1)} \ \ p_1^{(n-1)})$

$\lim p_0^{(n)} = \Pi_0$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} p_0^{(n-1)} = \Pi_0$

$\lim p_1^{(n)} = \Pi_1$ $\qquad$ $\lim_{n\to\infty} p_1^{(n-1)} = \Pi_1$

$$(\Pi_0 \ \Pi_1) = \underbrace{(\Pi_0 \ \Pi_1)}_{1\times 2} \cdot \underbrace{P}_{2\times 2} \Rightarrow (\Pi_0 \ \Pi_1) = (\Pi_0 \ \Pi_1) \begin{bmatrix} 1-\alpha & \alpha \\ b & 1-b \end{bmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \Pi_0 = (1-\alpha)\Pi_0 + \Pi_1 b \\ \Pi_1 = \alpha \cdot \Pi_0 + \Pi_1 (1-b) \end{cases}$$

(Μετά από πολλά μαθήματα θα κάνουμε το Θ. Foster που δεν θα απαιτεί την απόδειξη του $p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P$).

$$\left.\begin{array}{l} \alpha \Pi_0 = \Pi_1 b \\ \text{Είναι } \Pi_0 + \Pi_1 = 1 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Pi_0 = \frac{b}{\alpha+b}, \ \Pi_1 = \frac{\alpha}{\alpha+b}.$$

Ασκ. (3.2.3) Σε μία μελέτη των βροχοπτώσεων μιας περιόδου, 2 μελετητές βρήκαν ότι η εναλλαγή των βροχερών - στεγνών ημερών μπορεί να παρασταθεί επαρκώς από μία μαρκοβιανή αλυσίδα 2 καταστάσεων. Ο παρακάτω πίνακας δίνει μετρήσεις 2.437 ημερών:

		Σημερινή	
		Στεγνή	Βροχερή
Προηγ.	Στεγνή	1049	350
	Βροχερή	351	687.

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = (1-x)^{-1}$$

(i) Να βρεθεί ο πίνακας μετάβασης ενός βήματος.
(ii) Να βρεθούν οι πιθανότητες $p_{ij}^{(n)}$ $\forall i,j,n$.
(iii) Αν η σημερινή μέρα είναι στεγνή, μετά από πόσες μέρες αναμένεται να βρέξει;

Λύση: (i) Έστω η στοχ. διαδ. που περιγράφει τον καιρό τη n-οστή μέρα. ⇒ Σ.Δ. σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $S=\{0=\text{στεγνή}, 1=\text{βροχερή}\}$.
Μαρκοβιανή Αλυσίδα → Ομογενής
→ Μαρκοβιανή Ιδιότητα.

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & \frac{1049}{1049+350} & \frac{350}{1049+350} \\ 1 & \frac{351}{351+687} & \frac{687}{351+687} \end{array}$$

→ Αθροίζω τις μέρες που ήταν στο 0 και πήγαν είτε στο 0 είτε στο 1.

(ii) Πρέπει να αποδ. ότι: $p^{(n)} = (p_0^{(n)} \; p_1^{(n)}) = p^{(0)} \cdot P^n$

και: $P^n = \begin{bmatrix} \frac{b+\alpha(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} & \frac{\alpha-\alpha(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} \\ \frac{b-b(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} & \frac{\alpha+b(1-\alpha-b)^n}{\alpha+b} \end{bmatrix}$

και: $p^{(n)} = p^{(0)} \begin{bmatrix} p_{00}^{(n)} & p_{01}^{(n)} \\ p_{10}^{(n)} & p_{11}^{(n)} \end{bmatrix}$

δηλ τις αποδείξεις 1 κ' 2

(iii) Ζητούμενο: η μέση τιμή μιας τυχαίας μεταβλητής.
T: η τ.μ. που περιγράφει τον αριθμό των ημερών μέχρι την 1η βροχερή μέρα.
Δυνατές τιμές της T: 1, 2, 3, ...

$$\underset{\wedge}{ET} = \sum_{t=1}^{\infty} t P(T=t) \overset{(*)}{=} \sum_{t=1}^{\infty} t (1-\alpha)^{t-1} \cdot \alpha \overset{(**)}{=}$$

μέση τιμή διακριτής

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} x^n\right)' = (1-x)^{-1} \Rightarrow$$
$$\rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} n x^{n-1} = (1-x)^{-2}$$

(*)
$$P(T=1) = \alpha$$
$$P(T=2) = (1-\alpha)\cdot\alpha$$
$$P(T=3) = (1-\alpha)^2\cdot\alpha$$
$$P(T=t) = (1-\alpha)^{t-1}\cdot\alpha, \quad \forall t = 1, 2, \ldots$$

$$\overset{(**)}{=} \alpha \sum_{t=1}^{\infty} t (1-\alpha)^{t-1} = \alpha (1-(1-\alpha))^{-2} = \alpha\cdot\alpha^{-2} = \frac{1}{\alpha}.$$

Ασκ. 3.2.4 : Σ' ένα ιατρικό πείραμα μελετάται η πιθανότητα ενός διανοητικά ασθενή να αντιδρά σωστά σ' ένα ερέθισμα. Έχει παρατηρηθεί ότι η αντίδραση του ατόμου σε μια επαν. του πειράματος εξαρτάται απ' την αντίδραση του ατόμου ~~σ...~~ στο προηγούμενο πείραμα. Αν ο ασθενής αντιδράσει σωστά στο προηγ. τότε έχει πιθ. 70% να αντιδρ. σωστά στο επόμενο. Αν αντιδράσει λάθος τότε έχει πιθ. να αντιδράσει σωστά στο επόμενο 40%.
(i) Αν ο ασθενής αντιδράσει σωστά στο 1ο πείραμα, ποια η πιθανότητα να αντιδράσει σωστά και στο 5ο πείραμα;
(ii) Αν στο 1ο αντιδράσει λάθος, ποια η πιθ. να είναι το 5ο πείραμα εκείνο που θα αντιδράσει σωστά για πρώτη φορά;

Λύση: X_n: τ.μ. που περιγράφει την αντίδραση του ασθενούς στην n-οστή εκτέλεση του πειράματος.

Άρα είναι σ.δ. σε διακριτό χρόνο με χώρο καταστάσεων $S = \{0 = \text{σωστό},\ 1 = \text{λάθος}\}$. Επειδή η αντίδραση του ασθενούς σε μια επανάλ. του πειρ. εξαρτάται μόνο απ' την προηγ. επαν. $\Rightarrow$ Μαρκοβιανή ΙΔ.
Μας δίνονται πιθανότητες μεταβ. για κάποιο πείραμα άρα οι πιθ. μετάβασης είναι ανεξάρτητες απ' το πού γίνεται η μετάβαση $\Rightarrow$ άρα έχω ομογενή Μαρκ. Αλυσίδα 2 καταστάσεων με πίνακα μετάβασης

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1 & \beta & 1-\beta \end{array} = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 0{,}7 & 0{,}3 \\ 1 & 0{,}4 & 0{,}6 \end{array}$$

Σ □ □ □ Σ

1η 2η 3η 4η 5η

$P_{00}^{(4)}$

Θέλω την 1η κ' τη 2η απόδειξη ώστε να βρω ότι

$$P^{(n)} = \begin{bmatrix} \frac{\beta + \alpha(1-\beta-\alpha)^n}{\alpha+\beta} & \ldots \\ \ldots & \ldots \end{bmatrix}$$

$P_{00}^{(4)}$ (για $\alpha = 0{,}3$, $\beta = 0{,}4$, $n = 4$).

(ii) Λ Λ Λ Λ Σ

1η . . . 5η

$$P(\text{ζητούμενη}) = (1-\beta)^3 \cdot \beta \overset{0{,}4=\beta}{=} \ldots$$

Ασκ. 3.2.1: Έστω Μαρκ. Αλυσίδα 2 καταστάσεων

$$P = \begin{array}{c|cc} & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1-\alpha & \alpha \\ 1 & \beta & 1-\beta \end{array}$$

$\alpha + \beta \neq 2$, $\alpha + \beta \neq 0$.
Εάν $\mu_{ij}^{(n)}$: αναμενόμενος αριθμός επισκέψεων την κατάστασης j σε n-βήματα ξεκινώντας απ' την κατάσταση i, $\forall i, j, n$.
Να προσδιοριστεί ο $\mu_{ij}^{(n)}$ συναρτήσει πιθανοτήτων που μπορείτε να υπολογίσετε.

Λύση: $\mu_{ij}^{(n)}$: η μέση τιμή μιας τ.μ. (= αναμενόμενος).
$X_{ij}^{(n)}$: τ.μ. : ο αριθμός επισκ. της j σε n-βήματα απ' την κατάσταση i. Είναι: $\mu_{ij}^{(n)} = E(X_{ij}^{(n)})$.

$$X_{ij}^{(n)} = \cancel{\quad} Y_{ij}^{(1)} + Y_{ij}^{(2)} + \dots + Y_{ij}^{(n)}$$

$$Y_{ij}^{(l)} = \begin{cases} 1, \text{ αν επισκέπτομαι την } j \text{ αφού } i \text{ στο } l \text{ βήμα} \\ 0, \text{ αλλού} \end{cases} \quad \forall l = 1, \dots, n.$$

$$E X_{ij}^{(n)} = \cancel{\quad} E(Y_{ij}^{(1)} + \dots + Y_{ij}^{(n)}) = \underbrace{E Y_{ij}^{(1)} + \dots + E Y_{ij}^{(n)}}_{\text{διακριτές}} =$$

$$= 1 \cdot P(Y_{ij}^{(1)} = 1) + 0 \cdot P(Y_{ij}^{(1)} = 0) + \dots + 1 \cdot P(Y_{ij}^{(n)} = 1) =$$

$$= \underbrace{1 \cdot P_{ij}^{(1)}}_{\text{από τον } P} + \underbrace{1 \cdot P_{ij}^{(2)}}_{\text{από τον } P^2} + \dots + \underbrace{1 \cdot P_{ij}^{(n)}}_{\text{από τον } P^n}$$

(άρα θέλω και τις 2 πρώτες αποδείξεις).

Ασκ. 3.2.2: Για την Μαρκ. Αλυσίδα (2 καταστάσεων) της προηγ. άσκ. κάποια στιγμή βρίσκεται στην κατάσταση i, $i = 0, 1$ και α_0: αριθμός <u>νέων</u> χρονικών περιόδων που η διαδικασία παραμένει στην κατάσταση 0 μέχρι να μεταπηδήσει στην κατάσταση 1.
Να βρεθούν η κατανομή και η μέση τιμή της.

Λύση: <u>Δυνατές τιμές της ~~...~~ α_0</u>: 0, 1, 2, ...

$$P(\alpha_0 = 0) = P(0 \to 1) = \alpha \qquad \boxed{0} \to \boxed{1}$$
$$P(\alpha_0 = 1) = P(0 \to 0 \to 1) = (1-\alpha) \cdot \alpha \qquad \boxed{0} \to \boxed{0} \to \boxed{1}$$
$$P(\alpha_0 = 2) = P(0 \to 0 \to 0 \to 1) = (1-\alpha)^2 \cdot \alpha$$
$$\vdots$$
$$P(\alpha_0 = t) = (1-\alpha)^t \cdot \alpha, \quad t = 0, 1, 2, \dots$$

$$E(\alpha_0) = \sum_{t=0}^{\infty} t (1-\alpha)^t \cdot \alpha = \alpha \cdot (1-\alpha) \sum_{t=0}^{\infty} t (1-\alpha)^{t-1} =$$

$$= \alpha(1-\alpha)(1-(1-\alpha))^{-2} = \cancel{\alpha(1-\alpha)(1-\alpha)^{-2}}$$

$$= \frac{1-\alpha}{\alpha}$$

Μαρκοβιανές Αλυσίδες με περισσότερες από 2 καταστάσεις

Η πιθ. η σ.δ. τη χρ. στιγμή n να βρίσκεται στην κατάσταση j : $p_j^{(n)} = P(X_n = j)$ (1η αποδ)

$p_{ij}^{(n)} = P(X_n = j \mid X_0 = i)$ (2η -11-)

$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_j^{(n)}$

~~1)~~ $\cancel{p_j^{(n)} = p_0^{(n-1)}}$

Αποδ: 1) $p_j^{(n)} = p_0^{(n-1)} p_{0j} + p_1^{(n-1)} \cdot p_{1j} + p_2^{(n-1)} p_{2j} +$

$+ p_3^{(n-1)} p_{3j} + \ldots \quad (n = \infty) \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_j^{(n)} = \left(p_0^{(n-1)} \; p_1^{(n-1)} \; p_2^{(n-1)} \; p_3^{(n-1)} \ldots \right) \begin{pmatrix} p_{0j} \\ p_{1j} \\ p_{2j} \\ p_{3j} \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow p_j^{(n)} = p^{(n-1)} * (j+1)$-στήλη του $P \Rightarrow$

$$\Rightarrow \boxed{p^{(n)} = p^{(n-1)} \cdot P} = \boxed{p^{(0)} \cdot P^n}$$

με $p^{(0)} = \left(p_0^{(0)} \; p_1^{(0)} \ldots \right)$

Αποδ: 2) $p_j^{(n)} = p_0^{(0)} p_{0j}^{(n)} + p_1^{(0)} p_{1j}^{(n)} + p_2^{(0)} p_{2j}^{(n)} + \ldots \Rightarrow$

$$\Rightarrow p_j^{(n)} = \left(p_0^{(0)} \; p_1^{(0)} \; p_2^{(0)} \ldots \right) \begin{pmatrix} p_{0j}^{(n)} \\ p_{1j}^{(n)} \\ p_{2j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow p_j^{(n)} = p^{(0)} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} p_{0j}^{(n)} \\ p_{1j}^{(n)} \\ p_{2j}^{(n)} \\ \vdots \end{pmatrix}}_{(j+1)\text{-στήλη του πίνακα } P^n}$$